

数学解析試験問題

担当：堺

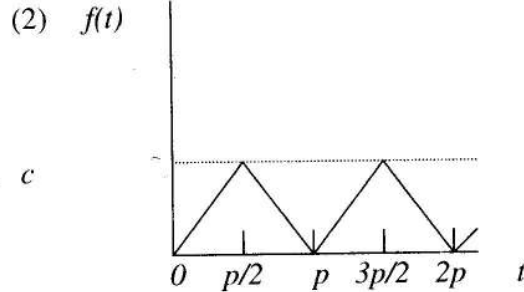
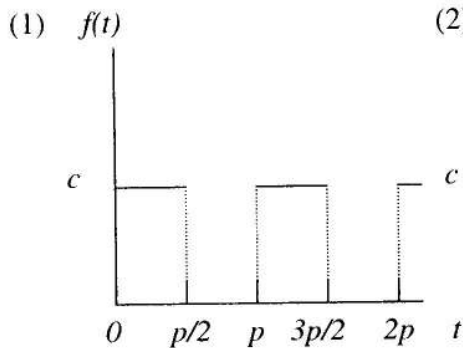
以下の5問のうち、任意の4問を選択して答えよ。

1. Riccati の微分方程式を解け

$$y = x \frac{dy}{dx} - \frac{27}{256} \left(\frac{dy}{dx} \right)^4$$

2. 熱伝導方程式 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ ($-\infty < x < \infty, t > 0$) を、条件 $u(x, 0) = f(x)$, $u(x, t)$ は有界のもとで、変数分離法によって解け。 k は正の定数、 $f(x)$ は $(-\infty, \infty)$ で絶対可積分で、 x の全ての領域で微分可能とする。

3. 次のグラフで表される周期関数
- $f(t)$
- のラプラス変換を求めよ。



4. 長方形の周に沿って解析関数 $e^{-(z-ib)^2}$ を積分する事によって定積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx$ の値を求めよ。

5. (1)
- $f(z)$
- が
- z
- の解析関数であるとき、以下の等式を証明せよ。

$$\Delta |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

- (2)
- $f(z) = z^2 + iz$
- を例として、この結果の正しいことを検証せよ。